Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas 2 (MA1112)
Intensivo 2024
Primer Parcial
30 puntos

Nombre: ________________________________

N° Carnet: ________________________________

Justifique sus Respuestas

1. Sea $f(x) = \cos(x)$ en $[0, \pi/2]$

   a. **(4 puntos)** Aproxime el área debajo de la gráfica de $f(x) = \cos(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$ usando la suma de Riemann con respecto a la partición $[0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2]$. Seleccione el punto de muestra x_i^* como el extremo derecho del i-ésimo subintervalo. Realice la representación gráfica de esta suma.

   b. **(1 punto)** Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$, utilizando el 2do. Teorema Fundamental del Cáculo.

   c. **(1 punto)** Compare los resultados obtenidos en a. y b., razone el resultado de su comparación. Para ello, utilice las siguientes aproximaciones: $\sqrt{3} = 1{,}7$; $\sqrt{2} = 1{,}4$; $\pi = 3$.

2. Sea $f(x) = 4 - x^2$ en $[2, 4]$

   a. **(5 puntos)** Calcule la siguiente integral definida utilizando la definición (como el límite de las sumas de Riemann) $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

   b. **(1 punto)** Calcule el valor promedio de la función $f(x)$ en el intervalo $[2, 4]$

3. **(2 puntos)** Use el teorema de simetría para calcular

$$\int_{-4\pi}^{4\pi} \left(x^3 + \cos\left(\frac{x}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right) \right) \mathrm{d}x$$

4. **(3 puntos c/u)** Calcule las siguientes integrales:

   a. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+3}\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x$ c. $\displaystyle\int_{-1}^{7} \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$ d. $\displaystyle\int_{-3}^{1} |x^3 - x|\,\mathrm{d}x$

5. **(4 puntos)** Dada la función $G(x) = \displaystyle\int_1^{\operatorname{sen}(x)} x \cdot t\,\mathrm{d}t$, hallar $G'(0)$

SOLUCIONES

1. Sea $f(x) = \cos(x)$ en $[0, \pi/2]$

a. **(4 puntos)** Aproxime el área debajo de la gráfica de $f(x) = \cos(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$ usando la suma de Riemann con respecto a la partición $[0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2]$. Seleccione el punto de muestra x_i^* como el extremo derecho del i-ésimo subintervalo. Realice la representación gráfica de esta suma.

Consideremos una partición irregular de 4 subintervalos, donde el punto muestra será el extremo derecho de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

- Divisiones de los subintervalos (x_i's)

$x_0 = 0$
$x_1 = \frac{\pi}{6}$
$x_2 = \frac{\pi}{4}$
$x_3 = \frac{\pi}{3}$
$x_4 = \frac{\pi}{2}$

- Logitudes de los subintervalos

En general, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
En particular:
$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$
$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$
$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$
$\Delta x_4 = x_4 - x_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

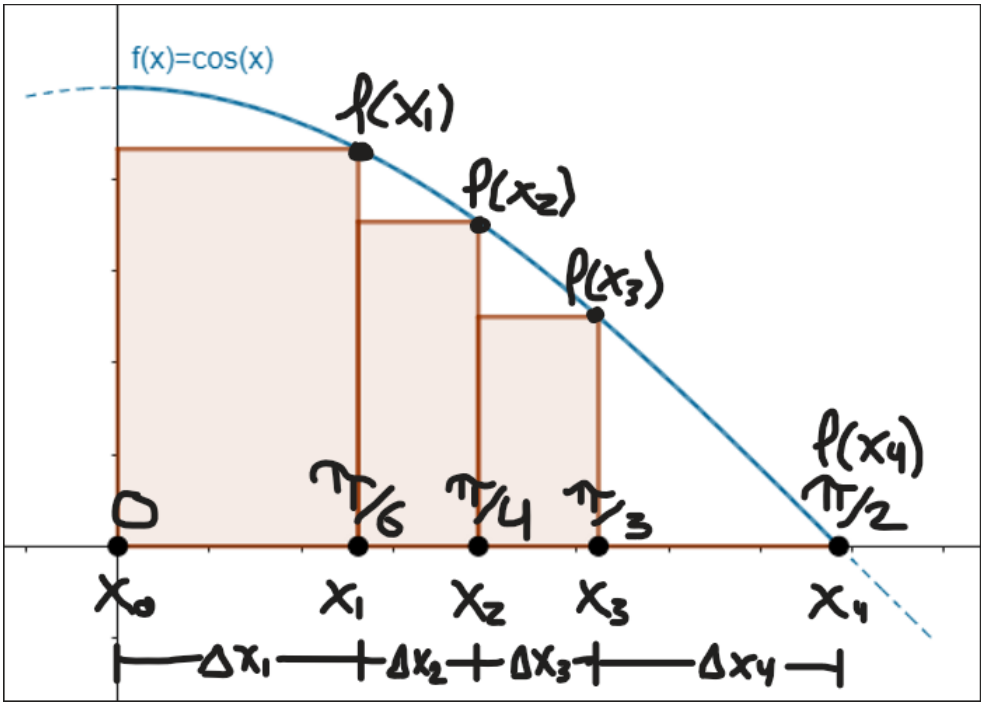
Teniendo en cuenta lo anterior, la suma viene dada por:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{4} \cos(x_i)\Delta x_i = \cos(x_1)\Delta x_1 + \cos(x_2)\Delta x_2 + \cos(x_3)\Delta x_3 + \cos(x_4)\Delta x_4 =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{6} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{12} + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{\pi}{12} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}\left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi\left(2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1\right)}{24}$$

Se puede representar de la siguiente manera gráficamente:



Solución 1.a

$$A \approx \frac{\pi\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)}{24}$$

b. **(1 punto)** Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$, utilizando el 2do. Teorema Fundamental del Cáculo.

$$\int_x^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(x)\Big|_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0) = 1$$

Solución 1.b

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

c. **(1 punto)** Compare los resultados obtenidos en a. y b., razone el resultado de su comparación. Para ello, utilice las siguientes aproximaciones: $\sqrt{3} = 1{,}7$; $\sqrt{2} = 1{,}4$; $\pi = 3$.

Llamemos S al resultado del inciso (a.), de manera que

$$S = \frac{\pi\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)}{24} \approx \frac{3\,(2(1,7)+1,4+1)}{24} = \frac{3,4+2,4}{8} = \frac{5,8}{8}$$

Veamos que S se aproxima bastante cerca a este valor, y también, $S_1 = \dfrac{5,8}{8} < 1 = A$, donde A es el valor del área bajo la curva, que es el resultado del inciso (b.). Tiene sentido este resultado, pues, el área aproximada bajo la curva tomando como punto muestra el extremo derecho de cada sub-intervalo, da como resultado la suma de las áreas de los rectángulos mostrados en la figura del inciso (a.), los cuales son inscritos, por lo que esta área aproximada debe ser menor que el área total.

2. Sea $f(x) = 4 - x^2$ en $[2, 4]$

a. **(5 puntos)** Calcule la siguiente integral definida utilizando la definición (como el límite de las sumas de Riemann) $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

Consideremos una partición regular con n subintervalos, en el intervalo $[2, 4]$

- Longitud de los sub-intervalos:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

- Divisiones de los subintervalos (x_i's)

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 2 + \frac{2}{n} \\
x_2 &= 2 + \frac{4}{n} \\
&\vdots \\
x_{i-1} &= 2 + (i-1)\frac{2}{n} \\
x_i &= 2 + \frac{2i}{n} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= 2 + (n-1)\frac{2}{n} \\
x_n &= 4
\end{aligned}$$

- Puntos muestra

Para cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tomaremos los puntos muestra como el extremo derecho de cada subintervalo ($x_i^* = x_i$)

Con todo lo anterior en cuenta, armamos la Suma de Riemann de manera que:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(4-(x_i)^2\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(4-\left(2+\frac{2i}{n}\right)^2\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(4-\left(4+\frac{8i}{n}+\frac{4i^2}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(4-4-\frac{8i}{n}-\frac{4i^2}{n^2}\right) = -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i}{n}+\frac{4i^2}{n^2}\right) = -\frac{2}{n}\left(\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) =$$

$$= -\frac{2}{n}\left(\frac{8}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = -\frac{2}{n}\left(4(n+1)+\frac{2}{3}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right) =$$

$$= -8\frac{(n+1)}{n} - \frac{4}{3}\frac{(n+1)}{n}\frac{(2n+1)}{n} = -8\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Luego, la integral viene dada por

$$I = \lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}\left(-8\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right) = -8 - \frac{8}{3} = -\frac{32}{3}$$

Solución 2.a

$$\int_2^4 (4-x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{32}{3}$$

b. **(1 punto)** Calcule el valor promedio de la función $f(x)$ en el intervalo $[2,4]$

En general, $v_{prom} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

En particular,

$$v_{prom} = \frac{1}{4-2}\int_2^4 (4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(-\frac{32}{3}\right) = -\frac{16}{3}$$

Solución 2.b

$$v_{prom} = -\frac{16}{3}$$

3. **(2 puntos)** Use el teorema de simetría para calcular

$$\int_{-4\pi}^{4\pi}\left(x^3+\cos\left(\frac{x}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)\right)\mathrm{d}x$$

El teorema de simetría dice que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x & \text{si} \quad f(x) \text{ es par} \\ \\ 0 & \text{si} \quad f(x) \text{ es impar} \end{cases}$$

Veamos cuáles de las funciones dentro de la integral son pares y cuales son impares:

$(-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 \longrightarrow$ IMPAR

$\cos\left(\dfrac{(-x)}{4}\right) = \cos\left(-\dfrac{x}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right) \longrightarrow$ PAR

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{(-x)}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(-\dfrac{x}{4}\right) = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right) \longrightarrow$ IMPAR

De acá, si partimos de la integral original,

$$\int_{-4\pi}^{4\pi}\left(x^3+\cos\left(\frac{x}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)\right)\mathrm{d}x = \cancelto{0}{\int_{-4\pi}^{4\pi} x^3\,\mathrm{d}x} + \int_{-4\pi}^{4\pi}\cos\left(\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x + \cancelto{0}{\int_{-4\pi}^{4\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x} = 2\int_0^{4\pi}\cos\left(\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= 8\int_0^{4\pi}\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{4}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)\Big|_0^{4\pi} = 0$$

Solución 3.

$$\int_{-4\pi}^{4\pi}\left(x^3+\cos\left(\frac{x}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)\right)\mathrm{d}x = 0$$

4. **(3 puntos c/u)** Calcule las siguientes integrales:

a. $$\int \frac{x}{x^4+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x^2)^2+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{3\left(\dfrac{(x^2)^2}{3}+1\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{x}{\left(\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\dfrac{2x}{\sqrt{3}}}{\left(\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}x$$

Cambio de variable:

$$u = \frac{x^2}{\sqrt{3}} \qquad \mathrm{d}u = \frac{2x}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x$$

Nos queda la integral:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2x}{\sqrt{3}}}{\left(\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{6}\int\frac{du}{u^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan(u)+C = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Solución 4.a

$$\int \frac{x}{x^4+3}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)+C$$

b. $$\int\frac{1}{1-\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x = \int\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{(1-\operatorname{sen}(x))(1+\operatorname{sen}(x))}\,\mathrm{d}x = \int\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{(1-\operatorname{sen}^2(x))}\,\mathrm{d}x = \int\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x + \int\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int\sec^2(x)\,\mathrm{d}x + \int\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\sec^2(x)\,\mathrm{d}x + \int\tan(x)\sec(x)\,\mathrm{d}x = \tan(x)+\sec(x)+C$$

Solución 4.b

$$\int\frac{1}{1-\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x = \tan(x)+\sec(x)+C$$

c. $$\int_{-1}^{7}\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$$

Cambio de variable:

$$\begin{array}{ll} u^2 = x+2 & x=7\Rightarrow u=3 \\ x=u^2-2 & x=-1\Rightarrow u=1 \\ \mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u & \end{array}$$

Nos queda la integral:

$$\int_{-1}^{7}\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3\frac{(u^2-2)^2}{u}2u\,\mathrm{d}u = 2\int_1^3(u^2-2)^2\,\mathrm{d}u = 2\int_1^3(u^4-4u^2+4)\,\mathrm{d}u =$$
$$= 2\left(\frac{u^5}{5}-\frac{4u^3}{3}+4u\right|_1^3 = 2\left(\frac{3^5}{5}-\frac{4\cdot 3^3}{3}+4\cdot 3-\frac{1}{5}+\frac{4}{3}-4\right) = 2\left(3^3\left[\frac{9}{5}-\frac{4}{3}\right]+8+\frac{17}{15}\right) = 2\left(\frac{27\cdot 7}{15}+\frac{137}{15}\right) =$$
$$= 2\left(\frac{189}{15}+\frac{137}{15}\right) = 2\left(\frac{326}{15}\right) = \frac{652}{15}$$

Solución 4.c

$$\int_{-1}^{7}\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{652}{15}$$

d. $\displaystyle\int_{-3}^{1} |x^3 - x|\,\mathrm{d}x$

Definimos el valor absoluto:

$$|x^3 - x| = \begin{cases} x^3 - x & , \quad x^3 - x \geq 0 \\ -(x^3 - x) & , \quad x^3 - x < 0 \end{cases}$$

Veamos los intervalos por el método del cementerio:
$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$

	$-\infty$	-1	0	1 ∞
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

De acá,

$x^3 - x \geq 0$ cuando $x \in \{[-1, 0] \cup [1, \infty]\}$
$x^3 - x \leq 0$ cuando $x \in \{[-\infty, -1] \cup [0, 1]\}$

Por lo tanto, debemos separar la integral de acuerdo a los comportamientos de la función en los distintos intervalos:

$$\int_{-3}^{1} |x^3 - x|\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1} |x^3 - x|\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} |x^3 - x|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} |x^3 - x|\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{-3}^{-1} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{-3}^{-1} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{-1}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{0}^{1} =$$

$$= -\left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^2}{2}\right) + \left(\frac{(0)^4}{4} - \frac{(0)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2}\right) - \left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{(1)^2}{2} - \frac{(0)^4}{4} + \frac{(0)^2}{2}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{81}{4} + \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 16 + \frac{1}{2} = \frac{33}{2}$$

Solución 4.d

$$\int_{-3}^{1} |x^3 - x|\,\mathrm{d}x = \frac{33}{2}$$

5. **(4 puntos)** Dada la función $G(x) = \displaystyle\int_{1}^{\operatorname{sen}(x)} x \cdot t\,\mathrm{d}t$, hallar $G'(0)$

$$G(x) = \int_1^{\operatorname{sen}(x)} x \cdot t \, \mathrm{d}t = x \int_1^{\operatorname{sen}(x)} t \, \mathrm{d}t$$

$$G'(x) = \left(x \int_1^{\operatorname{sen}(x)} t \, \mathrm{d}t \right)' = (x)' \int_1^{\operatorname{sen}(x)} t \, \mathrm{d}t + x \left(\int_1^{\operatorname{sen}(x)} t \, \mathrm{d}t \right)' = \int_1^{\operatorname{sen}(x)} t \, \mathrm{d}t + x \left(\int_1^{\operatorname{sen}(x)} t \, \mathrm{d}t \right)'$$

Veamos que, por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\left(\int_1^{\operatorname{sen}(x)} t \, \mathrm{d}t \right)' = \operatorname{sen}(x)$$

$$\int_1^{\operatorname{sen}(x)} t \, \mathrm{d}t = \left(\frac{t^2}{2} \right|_1^{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}^2(x) - 1}{2} = -\frac{\cos^2(x)}{2}$$

Por lo tanto,

$$G'(x) = -\frac{\cos^2(x)}{2} + x \operatorname{sen}(x)$$

$$\Rightarrow G'(0) = -\frac{\cos^2(0)}{2} + 0 \cdot \operatorname{sen}(0) = -\frac{1}{2}$$

Solución 5.

$$G'(0) = -\frac{1}{2}$$

Este parcial fue digitalizado en LaTeX por **Daniel Quijada** para **GECOUSB**

Daniel Quijada
20-10518
Lic. en Matemáticas

gecousb.com.ve

Cualquier error en la resolución de los ejercicios, notificar a **20-10518@usb.ve**